Τρίτη, 21 Νοεμβρίου 2017

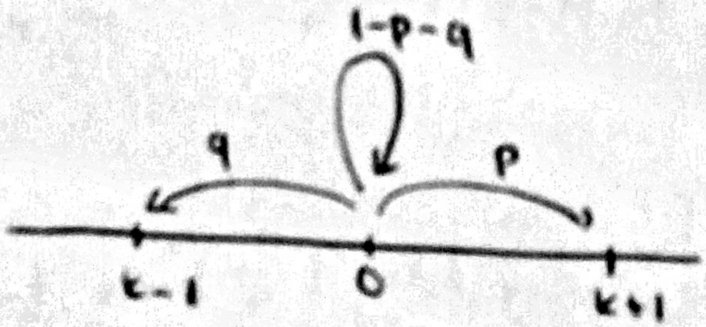
ΜΕΛΕΤΗ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΑΠΛΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Έστω X_n η σ.δ. που περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο κινείται ελεύθερα πάνω σε μια ευθεία γραμμή

βήματα δεξιά με πιθανότητα p

-"- αριστερά -"- q

αναπαυση -"- $1-p-q$



Εστω z_i η τμ που παριστάνει την i-οστή μετατόπιση και, ΧΒΤΓ, θεωρούμε ότι $x_0=0$

Ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν

(1ο) Ποια η πιθανότητα η σ.δ. να βρίσκεται τη χρονική στιγμή n στη θέση k $(P(x_n=k))$

(2ο) Ποια η πιθανότητα η σ.δ. μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα να βρίσκεται μεταξύ των θέσεων $[k_1, k_2]$ $(P(k_1 \leq x_n \leq k_2))$

<u>Ασκηση</u>

Ο Σπύρος και η Γεωργία παίζουν ένα παιχνίδι. Ο Σπύρος έχει πιθανότητα νίκης $\frac{1}{2}$ ενώ η Γεωργία $\frac{1}{3}$

(1) Ποια η πιθανότητα μετά από 10 παιχνίδια η Γ να έχει 2 περισ. νίκες; $(P(x_{10}=2))$

(2) Ποια η ... 200 ... η Γ να προηγείται στις νίκες από 20 μέχρι 30; $(P(20 \leq x_{200} \leq 30))$

<u>Λυση</u>

(1) Εστω x_n η σ.δ. που περιγράφει τον αριθμό της διαφοράς νικών Γ−Σ

Προφανώς, $x_0=0$

Η σ.δ. μπορεί να περιγραφεί ως η κίνηση ενός σωματιδίου πάνω σε ευθεία γραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα

Θα υποθέσω $k>0$

Έχω βήματα δεξιά, αριστερά και αναπηδήσεις

$\downarrow$ πλήθος n_1, $\downarrow$ πλήθος n_2, $\downarrow$ πλήθος n_3

$n_1+n_2+n_3=n$!

$$\left.\begin{array}{l} n_1 \equiv \text{αριθμός νικών της Γ} \\ n_2 \equiv \text{αριθμός νικών του Ι} \\ n_3 \equiv \text{αριθμός ισοπαλιών} \end{array}\right\} n=10$$

Θέλω $n_1 - n_2 = 2 (=k)$

$\square \; \square \; \square \; \ldots \; \square$ n βήματα

• Με πόσους τρόπους διαλέγεις που θα κάνεις βήμα δεξιά;

$\binom{n}{n_1}$ με αντίστοιχη πιθανότητα p^{n_1}

• Στη συνέχεια, με πόσους τρόπους μπορείς να διαλέξεις από τα υπόλοιπα βήματα που θα κάνεις βήματα αριστερά;

$\binom{n-n_1}{n_2}$ με αντίστοιχη πιθανότητα q^{n_2}

• Στα υπολοιπα $n-n_1-n_2=n_3$ τοποθετουνται οι n_3 το πλήθος αναπ
σεις τοποθετουνται με εναν τροπο με αντιστοιχη πιθανοτητα $(1-p-q)$

$$P(X_n=k)=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \underbrace{\binom{n}{n_1}\cdot p^{n_1}}\,\underbrace{\binom{n}{n_2}q^{n_2}}\,\underbrace{(1-p-q)^{n_3}}$$

τροποι επι την
αντιστοιχη πιθαν

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}}\cdot p^{n_1}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\,q^{n_2}\cdot(1-p-q)^{n_3}=$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1!}\,p^{n_1}\,\frac{1}{n_2!\,n_3!}\,q^{n_2}\,(1-p-q)^{n_3}$$

Αν είχαμε $p=\frac{1}{3}$ και $q=\frac{2}{3}$ δεν θα είχα αναπηδηση και προφανώς δεν θα χρειαστούμε το άθροισμα

(2) $P(k_1 \le X_n \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(X_n=k) =$

$$= \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \frac{n!\, p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \leftarrow \text{ακριβής τιμή}$$

$\boxed{n=200}$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= 20 \\ k_2 &= 30 \end{aligned}}$$

Μπορούμε να βρούμε μια προσεγγιστική τιμή;

ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή $\mu = E(z_i)$ και διακύμανση $\sigma^2 = Var(z_i)$

Τότε, σύμφωνα με το ΚΟΘ, ισχύει ότι για μεγάλο n,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\text{προσεγ}} N(0,1)$$

$x_0 = 0$

$x_1 = z_1$ (η πρώτη μετατ/ση)

$x_2 = x_1 + z_2 = z_1 + z_2$

$x_3 = x_2 + z_3 = z_1 + z_2 + z_3$

$\vdots$

$x_n = x_{n-1} + z_n = \sum_{i=1}^{n} z_n$

$$P(z_i = z) = \begin{cases} p & , z = 1 \\ q & , z = -1 \\ 1-p-q & , z = 0 \end{cases}$$

$$\mu = E(z_i) = \Sigma\, z_i P(z = z_i) = p \cdot 1 + q(-1) + \cancelto{0}{(1-p-q) \cdot 0} = p - q$$

$$\boxed{\mu = p - q}$$

$$Var(z_i) = E(z^2) - [E(z)]^2$$

$$E(z^2) = \Sigma\, z_i^2\, P(z = z_i) = 1^2 \cdot p + (-1)^2 q + \cancelto{0}{(1-p-q)0} = p + q$$

$$\boxed{Var(z_i) = p + q - (p-q)^2}$$

$$P(k_1 \leq X_n \leq k_2) = P(k_1 - 0.5 \leq \Sigma z_i \leq k_2 + 0.5) =$$

$$= P\left(\frac{k_1 - n \cdot \mu - 0.5}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{\Sigma z_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{k_2 - n \cdot \mu + 0.5}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \simeq$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{k_2 - n \cdot \mu + 0.5}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - n \cdot \mu - 0.5}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

Άσκηση

$P(X_n > a) =$; , όταν

(i) $n \longrightarrow \infty$

(ii) $\mu z_i > 0$, δηλ. $p - q > 0 \Rightarrow p > q$

(i) $P(X_n > a) = 1 - P(X_n \leq a)$

$$= 1 - P(\Sigma z_i \leq a) = 1 - P(\Sigma z_i \leq a + 0.5) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\Sigma z_i - n\cdot\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{a - n\cdot\mu + 0.5}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \simeq$$

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{a + 0.5 - n\cdot\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1 - \Phi(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

<u>ΕΡΜΗΝΕΙΑ</u>: Όταν $p > q$, το σωματίδιο στον ΕΑΤΠ με πιθανότητα 1 πάει στο ∞ όταν το $n \longrightarrow \infty$

<u>Άσκηση</u>

$P(X_n \leq b) = ;$ όταν

(i) $n \to \infty$

(ii) $\mu = E z_i < 0$, δηλ. $p - q < 0$

ΛΥΣΗ

(i) $P(X_n \leq b) \simeq \Phi\left(\frac{b - n\mu + 0.5}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \Phi(+\infty) = 1$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ Όταν $p<q$, το ανωκατώφλιο του ΕΑ.Τ.Π με πιθανότητα 1 πάει στο $-\infty$, όταν $n \to \infty$

Πολυωνυμική Κατανομή

Εστω τυχαίο πείραμα που αποτελείται από n το πλήθος δοκιμές. Η κάθε μια δοκιμή έχει m δυνατά αποτελέσματα που είναι ξένα μεταξύ τους
Εστω τα ενδεχόμενα C_1, C_2, C_m με αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες και η πιθανότητα με κάθε δοκιμή αμεταβ-
λητη. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ οι τ.μ. που παριστούν το αριθμό των
φορών που εμφανίζεται το $C_1, C_2, \dots, C_m$ αντίστοιχα, με $X_1 + X_2 + \dots + X_m = n$

Τότε, $P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_m = n_m) = \dfrac{n!\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}}{n_1!\, n_2! \dots n_m!}$

με $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$

$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 35-43-51

(35) ταμείο κινηματογράφου

1 υπάλληλος

αφίξεις: Poisson (λ)

ουρά άπειρης χωρητ.

χρόνος παραμονής $\sim b(t)$, $t \geq 0$

$X_n \equiv$ αριθμός πελατών στο ταμείο και την ουρά αμέσως μετά την έξοδο του n-οστού πελάτη

→ Μ.Α.

→ P ;

→ δοθέντος ότι $b(t) = \mu e^{-\mu t}$, βρείτε οριακές πιθαν. Π

(43) Poisson ($\lambda = 4$)

$\mu = 7$

$X_n \equiv$ αριθμός προϊόντων στο σύστημα μετά το n-οστό προϊόν

→ Μ.Α.

→ P = ;

→ Π_2 = ;

(51) Poisson ($\lambda = 5$)

→ να παρασταθεί ως σ.δ. και να βρεθεί ο P όταν ο χρόνος ελέγχου είναι 3 ή 4 ή 5 μονάδες χρόνου με πιθ/τες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ αντίστοιχα

→ χρόνος ελέγχου Εκθ($\mu = 10$), Π_2 = ;

Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες και η πιθανότητα με κάθε δοκιμή αλλάζει
λήψη. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ οι τ.μ. που παριστούν το αριθμό των
φορών που εμφανίζεται το $C_1, C_2, \ldots, C_m$ αντίστοιχα, με $X_1+X_2+\ldots+X_m=n$
Τότε, $P(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots, X_m=n_m) = \dfrac{n!\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!}$

με $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$

$p_1+p_2+\ldots+p_m=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 35-43-51

(35) ταμείο κινηματογράφου

1 υπάλληλος

αφίξεις: Poisson (λ)

ουρά άπειρης χωρητ.

χρόνος παραμονής $\sim b(t)$, $t \geq 0$

X_n = αριθμός πελατών στο ταμείο και την ουρά αμέσως μετά την έξοδο του n-οστού πελάτη

→ Μ.Α.

→ P ;

→ δοθέντος ότι $b(t) = \mu e^{-\mu t}$, βρείτε οριακές πιθαν. Π

(43) Poisson ($\lambda=4$)
$\mu=7$

X_n: αριθμός προϊόντων στο σύστημα μετά το n-οστό προϊόν

→ Μ.Α.

→ $P=$;

→ $\Pi_2 =$;

(51) Poisson ($\lambda=5$)

→ να παρασταθεί ως σ.δ. και να βρεθεί ο P όταν ο χρόνος ελέγχου είναι 3 ή 4 ή 5 μονάδες χρόνου με πιθ/τες $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ αντίστοιχα

→ χρόνος ελέγχου Εκθ($\mu=10$), $\Pi_2 =$;

Λύση

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{\cancel{n+1}}^{B}, & X_n \geq 1 \\ A_{\cancel{n+1}}^{B}, & X_n = 0 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \\ \vdots & b_0 & b_1 & \cdots & \\ & \vdots & b_0 & \cdots & \\ & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

Σε όλες τις ασκήσεις γράφω το $b_k = P(b=k)$

$$P(b=k) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} b(t)\, dt$$

$$P(b=k) = \frac{\mu \lambda^k}{(\mu+\lambda)^{k+1}} = \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{k+1}}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{3} P(B=k \mid t=t_i)\, P(t=t_i) =$$

$$= \frac{(3\lambda)^k e^{-3\lambda}}{k!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(4\lambda)^k e^{-4\lambda}}{k!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(5\lambda)^k e^{-5\lambda}}{k!} \cdot \frac{1}{4}$$

ΟΡΙΑΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

$$P(B=k) = b_k \frac{e^k}{(1+e)^{k+1}}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ \vdots & b_0 & b_1 & \cdots \\ & \vdots & b_0 & \cdots \\ & & \vdots & \end{bmatrix}$$

→ Μη διαχωρ. Μ.Α.

→ Απεριοδική

$$x = xP \Rightarrow (x_0, x_1, \dots) = (x_0\ x_1\ \dots)\,P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_0 = x_0 b_0 + x_1 b_0 \Rightarrow x_0(1-b_0) = x_1 b_0 \xrightarrow{b_0 = \frac{p^0}{(1+p)^1} = \frac{1}{1+p}} \underbrace{x_0 p = x_1} \right]$$

$$\Big[x_1 = x_0 b_1 + b_1 x_1 + x_2 b_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_1}{p} b_1 + x_1 b_1 + x_2 b_0 \Rightarrow$$

$$x_1\left(1 - \frac{b_1}{p} - b_1\right) = x_2 b_0 \Rightarrow x_1\left(1 - \frac{p}{p(1+p)^2} - \frac{p}{(1+p)^2}\right) = x_2 \frac{1}{1+p} \Rightarrow$$

$$x_1 \frac{(1+p)^2 - (1+p)}{(1+p)^2} = x_2 \frac{1}{1+p} \Rightarrow \underbrace{x_2 = p^2 x_0} \Big]$$

$$\Big[x_2 = x_0 b_2 + x_1 b_2 + x_2 b_1 + x_3 b_0 \Rightarrow x_2 = \frac{x_2}{p^2} b_2 + \frac{x_2}{p} b_2 + x_2 b_1 + x_3 b_0 \Rightarrow$$

$$x_2\left(1 - \frac{b_2}{p^2} - \frac{b_2}{p} - b_1\right) = x_3 b_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{x_3 = x_2 p} \Big\} \Rightarrow \underbrace{x_3 = p^3 x_0} \Big]$$

Επομένως, $x_k = p^k x_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$x = (x_0, x_0 p, x_0 p^2, \dots)$

Για $x_0 \neq 0$, όλα τα $x_i \neq 0$, άρα υπάρχει λύση

Θέλω $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| = x_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p^k < \infty$

Αν $p < 1$, η ΜΑ είναι θετ. επαν/κή

Αν $p \geq 1$, δεν ισχύει το αντίστροφο του Foster $\Rightarrow$ παρ/κές ή ασθενώ

$\Rightarrow$ οριακές πιθαν. $= 0$

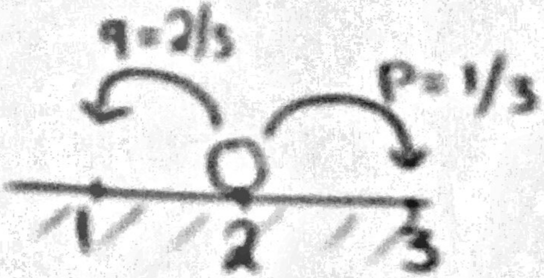
$\pi = c(p^0, p^1, p^2, \dots)$

$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \Rightarrow c \sum_{i=0}^{\infty} p^i = 1 \Rightarrow c = 1 - p$

Άρα, $\boxed{\pi_i = (1-p)\, p^i}$

$\pi_2 = (1-p)p^2$

Άσκηση 46



Το σωματίδιο ξεκινά απ' τη θέση δύο.

Υπόδειξη: $k! \simeq k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k}\sqrt{2\pi}$

Η κατάσταση 2 είναι παροδική αν-ν η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)}$ συγκλίνει

$$p_{22}^{(n)} = p_{22}^{(2k)} = \frac{(2k)!}{k!\,k!}p^k q^k \simeq \frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}}e^{-2k}\sqrt{2\pi}}{\dots}p^k q^k \simeq \dots \simeq \frac{(4pq)^k}{\sqrt{k}\sqrt{\pi}}$$

γιατί για $n=2k+1$ κάνει $p_{22}^{(n)}=0$

Αρκεί να ψάξω πότε συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4pq)^k}{\sqrt{k}\sqrt{\pi}}$

Αν $4pq < 1 \longrightarrow$ συγκλίνει $\Rightarrow$ παραδεκτή

Αν $4pq = 1 \longrightarrow$ αποκλίνει

Αν $4pq > 1 \longrightarrow$ Άτοπο!